ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЁННОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЕ ЭРМИТА–БИРКГОФА

Худяков А. П., Янович Л. А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», Брест, Беларусь,
e-mail: hudand1985@mail.ru
Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь,
e-mail: yanovich@im.bas-net.by

Обобщенному интерполированию Эрмита-Биркгофа относительно чебышевских систем тригонометрических, рациональных и экспоненциальных функций в скалярном случае посвящена работа [1]. В [2] такого типа формулы построены для функций матричного аргумента. Явный вид интерполяционного многочлена Эрмита-Биркгофа скалярной переменной по произвольной чебышевской системе функций приведен в [3]. Здесь рассмотрена интерполяция этого вида для функций от матриц.

Пусть X – множество квадратных матриц фиксированного порядка, $A \in X$, а $F(z)$ – целая функция, $z \in \mathbb{C}$. Предположим, что в узлах $A_0, A_1, \ldots, A_n$ из X известны значения $F(A_0), \ldots, F(A_n)$ и, кроме того, в одном из узлов A_j известно значение $D_{n+1}(F; A_j)$ дифференциального оператора вида

$$D_{n+1}F(A) = \big(D - b_n(z)\big)\cdots\big(D - b_0(z)\big)F(z)\Big|_{z=A}, \quad D = \frac{d}{dz}, \tag{1}$$

где функции $b_0(z) = \dfrac{\varphi_0'(z)}{\varphi_0(z)}$, $b_k(z) = \dfrac{\big(D_k\varphi_k(z)\big)'}{D_k\varphi_k(z)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ аналитические в интервале (a,b), а функции $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_n(z)$, $z \in \mathbb{C}$, образуют чебышевскую систему.

Теорема. *Для матричного многочлена*

$$\tilde{L}_{n+1}(A) = L_n(A) + \Omega_{n+1}(A)\Big[D_{n+1}(\phi_{n+1}; A_j)\Big]^{-1} D_{n+1}(F; A_j), \tag{2}$$

где

$$L_n(A) = -\begin{vmatrix} \overset{n}{\phi}_0(A_0) & \cdots & \overset{n}{\phi}_0(A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overset{0}{\phi}_n(A_0) & \cdots & \overset{0}{\phi}_n(A_n) \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \overset{n+1}{\phi}_0(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\phi}_0(A_n) & \overset{n+1}{\phi}_0(A) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \overset{1}{\phi}_n(A_0) & \cdots & \overset{1}{\phi}_n(A_n) & \overset{1}{\phi}_n(A) \\ \overset{0}{F}(A_0) & \cdots & \overset{0}{F}(A_n) & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Omega_{n+1}(A)=\begin{vmatrix}\overset{n}{\phi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n}{\phi_0}(A_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \overset{0}{\phi_n}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\phi_n}(A_n)\end{vmatrix}^{-1}\cdot\begin{vmatrix}\overset{n+1}{\phi_0}(A_0) & \cdots & \overset{n+1}{\phi_0}(A_n) & \overset{n+1}{\phi_0}(A)\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \overset{1}{\phi_n}(A_0) & \cdots & \overset{1}{\phi_n}(A_n) & \overset{1}{\phi_n}(A)\\ \overset{0}{\phi_{n+1}}(A_0) & \cdots & \overset{0}{\phi_{n+1}}(A_n) & \overset{0}{\phi_{n+1}}(A)\end{vmatrix},$$

выполняются интерполяционные условия

$$\tilde{L}_{n+1}(A_k)=F(A_k)\ \ (k=0,1,\ldots,n);\ \ D_{n+1}(\tilde{L}_{n+1};A_j)=D_{n+1}(F;A_j).$$

Если матрицы $A, A_0, A_1, \ldots, A_n, A_j, B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ *попарно перестановочны, то формула* (2) *точна для матричных многочленов вида*

$$P_{n+1}(A)=B_0\phi_0(A)+B_1\phi_1(A)+\ldots+B_{n+1}\phi_{n+1}(A),$$

где $B_0, B_1, \ldots, B_{n+1}$ – *произвольные фиксированные матрицы из X.*

Замечание. Здесь используются процедуры некоммутативного анализа [4]. Поэтому при вычислении определителей следует учитывать порядок расположения матриц в матричных произведениях, определенный фейнмановскими номерами, указанными в виде индексов над соответствующими матричными элементами.

Литература

1. Худяков, А.П. Интерполяционные многочлены типа Эрмита–Биркгофа относительно отдельных чебышевских систем функций / А.П. Худяков // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4. – С. 29–36.
1. Yanovich, L.A. On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L.A. Yanovich, A.P. Hudyakov // J. Numer. Appl. Math. – 2011. – № 2 (105). – P. 136–147.
2. Янович, Л.А. Обобщенные интерполяционные формулы Эрмита–Биркгофа для случая чебышевских систем функций / Л.А. Янович, А.П. Худяков // Диференціальні рівняння, обчислювальна математика, теорія функцій та математичні методи механіки : мат. Междунар. матем. конф. к 100-летию со дня рождения члена-корреспондента НАН Украины Положего Георгия Николаевича, Киев, 23–24 апреля 2014 г. / Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченко ; отв. за вып. В.Г. Самойленко. – Киев, 2014. – С. 142.